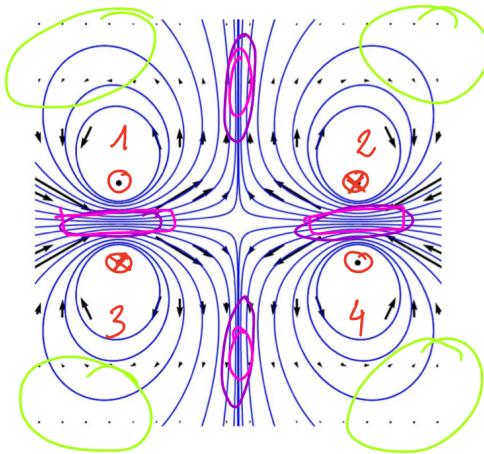
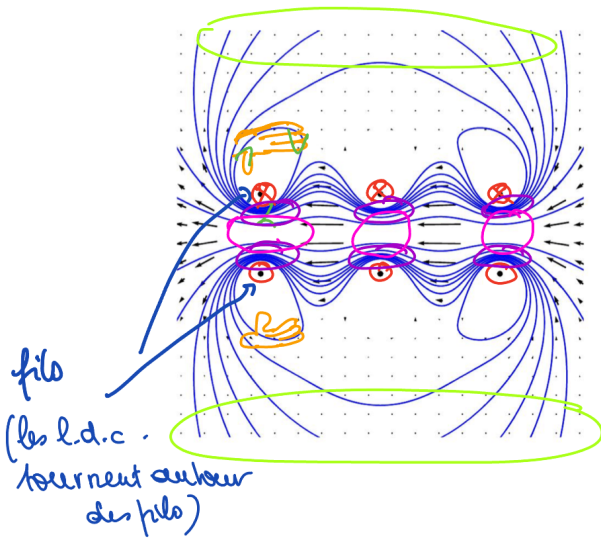


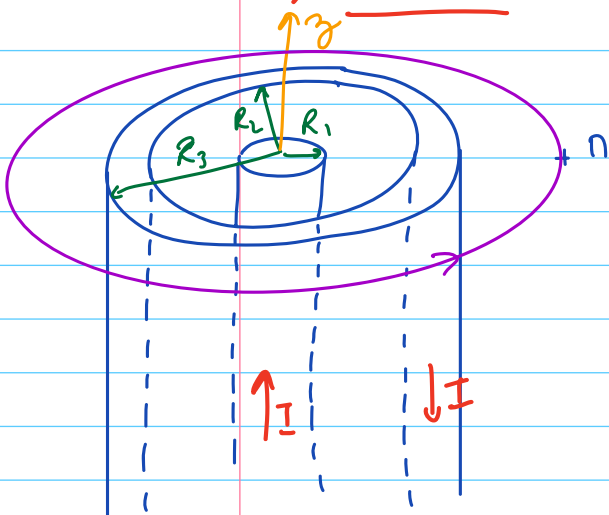
# TD EM 2

## SF2

lignes serrées  $\rightarrow$   = champ fort       champ faible  
lignes //  $\rightarrow$   = champ uniforme       $\hookrightarrow$  lignes espacées.



## Exercice 2



On se place en coordonnées cylindriques

Le plan  $(n, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie pour la distribution de courant. C'est donc un plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

donc

$$\vec{B}(n) = B(n) \vec{u}_\theta$$

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation le long de  $\vec{u}_z$  et par rotation autour de  $(Oz)$ , donc  $\vec{B}(n) = \vec{B}(r)$

Au final  $\vec{B}(n) = B(r) \vec{u}_\theta$

On choisit comme contour d'Ampère le cercle entouré par  $\vec{u}_z$ , autour de  $(Oz)$  et de rayon  $r$ .

$$\text{On a } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B(r) \cdot r d\theta = 2\pi r B(r).$$

$$\text{et } I_{\text{entacé}} = \begin{cases} I \frac{r^2}{R_1^2} & \text{si } r < R_1 \quad \textcircled{+} \\ I & \text{si } r \in [R_1; R_2] \\ I \left(1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}\right) & \text{si } r \in (R_2; R_3] \quad \textcircled{+} \textcircled{-} \\ 0 & \text{si } r > R_3 \end{cases}$$

② en effet, si  $r < R_1$ ,  $I_{\text{entacé}} = \iint_{\text{disque}(r)} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}$

avec  $\vec{j}_1$  tq  $I = \iint_{\text{disque}(R_1)} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}$  et  $\vec{j}_1 = j_1 \vec{u}_z$

ie  $I = \pi R_1^2 j_1$  et  $\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u}_z$

ainsi  $I_{\text{entacé}} = \pi r^2 \times \frac{I}{\pi R_1^2} = I \frac{r^2}{R_1^2}$

③④ De même, pour  $r \in [R_2; R_3]$ , on a  $I_{\text{enlacé}} = I + \iint_{\text{anneau}(r)} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}$   
 avec  $\vec{j}_2$  tel que  $-I = \iint_{\text{anneau}(R_3)} \vec{j}_2 \cdot dS \vec{u}_z$  et  $\vec{j}_2 = j_2 \vec{u}_z$

$$\text{ie } -I = j_2 \times \pi(R_3^2 - R_2^2) \quad \text{et} \quad \vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_z$$

$$\text{donc } I_{\text{enlacé}} = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \pi(r^2 - R_2^2)$$

$$= I \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

Au final:  $\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 I \frac{r}{2\pi R_1^2} \vec{u}_0 & \text{si } r < R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_0 & \text{si } r \in [R_1; R_2] \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \vec{u}_0 & \text{si } r \in [R_2; R_3] \\ \vec{0} & \text{si } r > R_3 \end{cases}$

Rq: on a bien continué de B en  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  ☺

d'intérêt d'un tel câble est qu'il n'y a pas de fuite magnétique vers l'extérieur.

### Exercice 3

1) cf cours fil épais

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \mu_0 \frac{R^2}{2r} \vec{j} & \vec{u}_\theta \quad \text{si } r > R \\ \mu_0 \frac{r}{2} \vec{j} & \vec{u}_\theta \quad \text{si } r < R \end{cases}$$

2) D'après le théorème de superposition:

$$\vec{B}_{\text{sanscavité}} = \vec{B} + \vec{B}_{\text{cavité seule pleine}}$$

$$\text{Donc } \vec{B} = \vec{B}_{\text{sc}} - \vec{B}_{\text{csp}}$$

Dans la cavité, on a  $0_1 \pi < R_1$  et  $0_2 \pi < R_2$

en notant  $R_1$  le rayon du fil plein et  $R_2$  celui de la cavité.

Pu ailleurs, dans le repère  $(O_1, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ ,

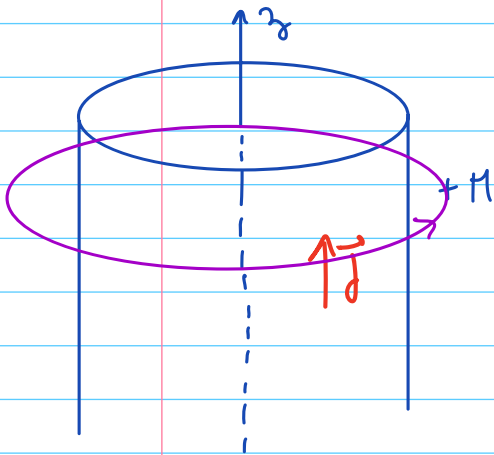
$$\text{on peut écrire } \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{O}_1 \vec{n}}{O_1 \pi}$$

$$\text{De même, dans } (O_2, \vec{u}_r', \vec{u}_\theta', \vec{u}_z) : \vec{u}_\theta' = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{O}_2 \vec{n}}{O_2 \pi}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{B} &= \mu_0 \frac{O_1 \pi}{2} \vec{j} \left( \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{O}_1 \vec{n}}{O_1 \pi} \right) - \mu_0 \frac{O_2 \pi}{2} \vec{j} \left( \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{O}_2 \vec{n}}{O_2 \pi} \right) \\ &= \mu_0 \frac{j}{2} \vec{u}_z \wedge (\vec{O}_1 \vec{n} - \vec{O}_2 \vec{n}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \frac{j}{2} \vec{u}_z \wedge \vec{O}_1 \vec{O}_2}$$

## Exercice 4



$$\begin{aligned}
 1) \text{ On a } I &= \iint_{\text{disque}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \\
 &= \int_{\pi=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z \cdot r dr d\theta \vec{e}_z \\
 &= 2\pi \int_0^R J_0 \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr \\
 &= 2\pi J_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R \\
 &= 2\pi J_0 \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \pi J_0 \frac{R^2}{2}} \quad \text{ie} \quad \boxed{J_0 = \frac{2I}{\pi R^2}}$$

2) Le plan  $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est plan de symétrie pour la distribution de charge, il est donc plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$  et  $\vec{B}'(r) = B(r) \vec{u}_\theta$ .

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation le long de  $(Oz)$  et par rotation autour de  $(Oz)$ . Donc  $\vec{B}'(r) = B(r) \vec{u}_\theta$

On choisit comme contour d'Ampère  $\Gamma$  le cercle d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}' \cdot d\vec{l}' = 2\pi r B(r)$$

et si  $r > R$   $I_{\text{enclosé}} = I$

$$\text{si } r < R \quad I_r = \iint_{\Gamma} \vec{j} \cdot d\vec{S}' = \int_{\pi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^r J_0 \left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r' dr' d\theta \quad \text{en notant } r' \text{ la coordonnée radiale de } \Pi.$$

$$\begin{aligned}
 I_r &= J_0 2\pi \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right) = J_0 \pi r^2 \left( 1 - \frac{r^2}{2R^2} \right) \\
 &= 2I \frac{r^2}{R^2} \left( 1 - \frac{r^2}{2R^2} \right)
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > R \\ \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{r}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) \vec{u}_\theta & \text{si } r < R \end{cases}$$

Rq: on a bien continuité de  $B$  en  $r = R$  ☺

## Exercice 5

1) a) le plan  $(n, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est plan de symétrie de la distribution de courant, donc plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

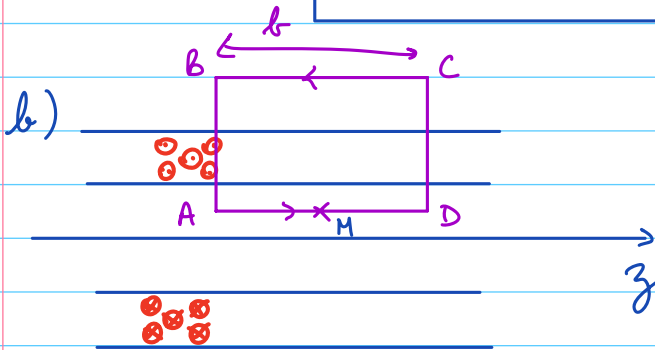
$$\text{Donc } \vec{B}(n) = B(n) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de  $(Oz)$  et par translation le long de  $(Oz)$

$$\text{Donc } \vec{B}(n) = \vec{B}(n).$$

Au final

$$\vec{B}(n) = B(n) \vec{u}_z$$



On considère le contour d'ampère ci-dessus : un rectangle dont un côté est à l'extérieur et le côté opposé passe par M.

$$\begin{aligned} \text{On a } \oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B \underbrace{\vec{B} \cdot d(-\vec{u}_r)}_{=0} + \int_B^C \underbrace{\vec{B} \cdot d(-\vec{u}_z)}_{=0} + \int_C^D \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{u}_r}_{=0} \\ &\quad + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{u}_z \\ &= B(r) b \end{aligned}$$

$$\text{et } I_{\text{enc}} = \begin{cases} (mb)(m(R_2 - R_1)) I & \text{si } r < R_1 \\ (mb)(m(R_2 - r)) I & \text{si } r \in [R_1; R_2] \end{cases}$$

En appliquant le théorème d'Ampère, on a donc

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 n m (R_2 - R_1) I & r < R_1 \\ \mu_0 n m (R_2 - r) I & r \in [R_1; R_2] \end{cases}$$

2) a)  $\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho r \omega \vec{u}_\theta$  par définition

b) idem 1a)  $\vec{B}(r) = B(r) \vec{u}_z$

c) premières étapes idem 1b).

Calcul de  $I_{\text{enc}} :$

$$\begin{aligned} \text{si } r < R_1 \\ I_{\text{enc}} &= \iint_{\sigma} \vec{j}' \cdot d\vec{S}' = \int_{z=z_0}^{z_0+b} \int_{r=R_1}^{R_2} \rho r \omega \, dr dz \\ &= \rho \omega b \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{\rho \omega b}{2} (R_2^2 - R_1^2) \end{aligned}$$

et pour  $r \in [R_1; R_2]$

$$I_{\text{enc}} = \int_{z_0}^{z_0+b} \int_{r=r}^{R_2} \rho r \omega \, dr dz = \frac{\rho \omega b}{2} (R_2^2 - r^2)$$

$$\text{On a donc } B(r) = \begin{cases} \mu_0 \frac{\rho \omega}{2} (R_2^2 - R_1^2) & \text{si } r < R_1 \\ \mu_0 \frac{\rho \omega}{2} (R_2^2 - r^2) & \text{si } r \in [R_1; R_2] \end{cases}$$

d) Pour que les distributions soient équivalentes, il faut que  $\vec{j}$  ne dépende pas de  $r$ .

Il suffit que  $\rho = \frac{\rho_0}{r}$ , car alors  $\vec{j} = \frac{\rho_0}{r} r \omega \vec{u}_\theta = \rho_0 \omega \vec{u}_\theta$ .

Une distribution uniforme de charge ne peut fonctionner.